数理解析研究所講究録
597巻 1986年 74-96 74

Picard モジュラー函数のθ-0値による表示について

千葉大理 志賀 弘典(Hironori Shiga)

§.0 動機

André Weil は1972年の講演「数論－その過去と現在」に於て，数論と楕円函数論は一体であり，Gauß，Abel，Jacobi の時代に特にそうであったのではなくFermatに於て既にそうであったと指摘しています．そして20世紀の数論もFermatを直接引き継いでいることを強調しています．

Hilbert が提起した第12問題（虚数乗法論の多変数化）を考え併せると，ここで言われている楕円函数は将来建設されるであろう"多変数楕円函数"をも意味していると思われます．

そこで楕円函数の数論的性格の一つとしてモジュラー函数という側面を考えてみます．モジュラー函数とはモジュライ空間に変数をもち函数値が複素多様体の表示形を決定している函数です．このような意味の2変数モジュラー函数としてPicard モジュラー函数があり，これは単に一つの特殊な例

であるに留らず多変数モジュラー函数の雛形としての性格を持っているに違いありません。即ち一変数（2次体の整数論）から多変数（高次体の整数論）へと普遍化される過程で必ず経過するであろう要衝としての位置を占めています。

このような観点に立つとき，古典虚数乗法論と対比してPicardモジュラー函数による虚数乗法論は如何に展開されるのか。これが筆者のこの主題を扱う動機です。

§.1 Picardモジュラー函数の構成

楕円曲線族の周期積分から楕円モジュラー函数が得られたように，ある種数3の曲線族の周期積分から2変数モジュラー函数が得られることをPicard [4] は指摘しています。これについて既に知られていることを楕円積分の場合と対比させて述べます。

[1] $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の領域 $\Lambda = \{[\xi_0, \xi_1] \in \mathbb{P}^1 : \xi_0\xi_1(\xi_0 - \xi_1) \neq 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, 1\}$ $(\lambda = \xi_1/\xi_0)$ を考え（以下[　]はいつも斉次座標を表します），Λ によってパラメトライズされる楕円曲線 $E(\xi) : w^2 = z(z-\xi_0)(z-\xi_1)$ 上の周期積分の比 $[\eta_0, \eta_1] = \left[\int_{\gamma_1}\frac{dz}{w}, \int_{\gamma_2}\frac{dz}{w}\right]$（ただし $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ は $H_1(E(\xi), \mathbb{Z})$ の基底で $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1$ なるもの）をとり，ξ に $[\eta_0, \eta_1]$ を対応させる Λ から $\mathbb{P}^1$ への多価解析写像を Φ とします。

するとΦによるΛの像は $D=\{[\eta_0,\eta_1]\in\mathbb{P}^1: {}^t\eta H\bar{\eta}<0\}$ $=\{\tau\in\mathbb{C}: \mathrm{Im}\,\tau>0\}$（ただし $H=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}$, $\eta={}^t(\eta_0,\eta_1)$, $\tau=\eta_1/\eta_0$）となり，基本群$\pi_1(\Lambda,*)$の$H_1(E(*),\mathbb{Z})$への作用がひきおこすDの一次変換群即ちモノドロミー群は$\Gamma=\{g\in PGL(2,\mathbb{Z}[i]): {}^tgH\bar{g}=H\}=PSL(2,\mathbb{Z})$のレベル2の主合同部分群$\Gamma(2)$で与えられます。このとき$\Phi$は$\Lambda$と$D/\Gamma(2)$との正則同型をひきおこし，さらにそのコンパクト化の間の同型に拡張されます。従ってΦの逆写像はD上定義された$\Gamma(2)$に関する保型函数を与えますが，これは通常λ一函数として知られているものです。$\lambda(\tau)$のJacobiのテータ函数を用いた表示（Jacobiの公式）

$$\lambda(\tau)=\vartheta_2^4(0,\tau)/\vartheta_3^4(0,\tau) \qquad (1\text{-}1)$$

が知られています。これを以下で用いるRiemannのテータ函数

$$\theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z,\Omega)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^g}\exp\{\pi i\,{}^t(n+a)\Omega(n+a)+2\pi i\,{}^t(n+a)(z+b)\}$$

（$z\in\mathbb{C}^g$, $\Omega\in\mathfrak{S}_g$, $a,b\in\mathbb{Q}^g$）

によって書き直すと

$$\lambda(\tau)=\vartheta^4\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}(0,\tau)\Big/\vartheta^4\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(0,\tau) \qquad (1\text{-}2)$$

となり，分母及び分子はそれぞれ$\Gamma(2)$に関する重み1の保型形式となっています。

［2］以上のことを$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$の領域

$$\Lambda = \{ [\xi_0, \xi_1, \xi_2] \in \mathbb{P}^2 : \xi_0\xi_1\xi_2(\xi_0 - \xi_1)(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_0) \neq 0 \}$$
$$= \{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy(x-1)(y-1)(x-y) \neq 0 \}$$

($x = \xi_1/\xi_0$, $y = \xi_2/\xi_0$) にパラメータを持つ代数曲線

$$C(\xi): \quad w^3 = z(z-\xi_0)(z-\xi_1)(z-\xi_2)$$

に対して拡張してゆきます．$C(\xi)$ は種数3で $\varphi_1 = \frac{dz}{w}$, $\varphi_2 = \frac{dz}{w^2}$, $\varphi_3 = \frac{z\,dz}{w^2}$ が $H^0(C(\xi), \mathcal{O}(K))$ の基底を与えます．$C(\xi)$ を z-平面上 $z = 0$, ξ_0, ξ_1, ξ_2, ∞ で三重分岐する三葉被覆とみてそのホモロジー基底 $\{A_i, B_i\}$ を図1のように与えます．

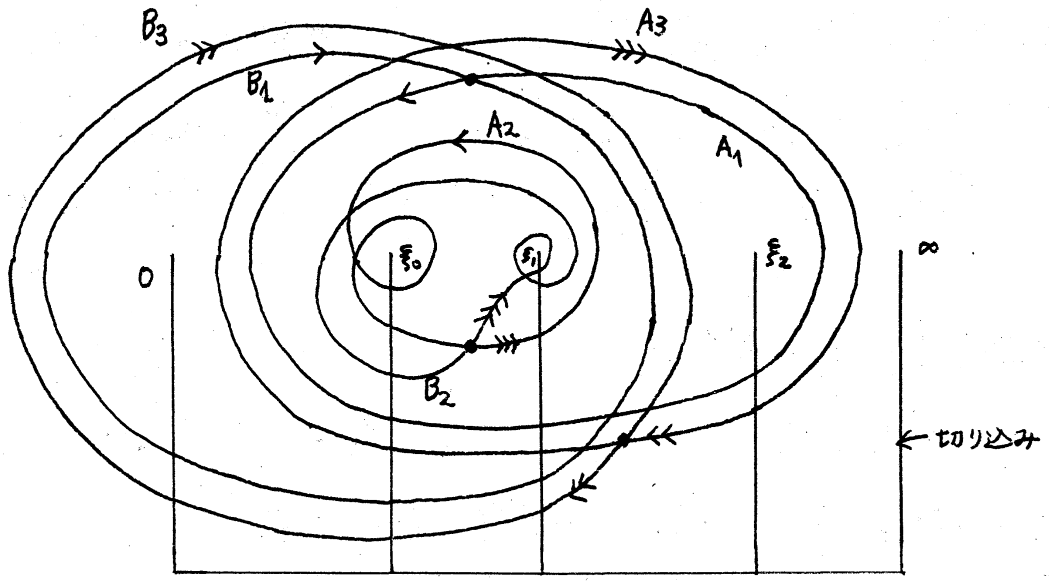

図1

$\rightarrow$ 一枚目
$\twoheadrightarrow$ 二枚目
$\ggg$ 三枚目

このとき $A_i \cdot B_j = \delta_{ij}$, $A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ が成り立ちます．

今$\int_{A_j}\omega_i = \delta_{ij}$となる$C(\xi)$上の正則微分形式$\omega_1, \omega_2, \omega_3$をとり $\eta_0 = \int_{A_1}\frac{dz}{w}$, $\eta_1 = \int_{B_3}\frac{dz}{w}$, $\eta_2 = \int_{A_2}\frac{dz}{w}$,

$$u = \eta_2/\eta_0, \quad v = \eta_1/\eta_0$$

とおくと周期行列

$$\left(\left(\int_{A_j}\omega_i\right), \left(\int_{B_j}\omega_i\right)\right) = \left(E, \Omega(\xi)\right)$$ は

$$\Omega(u,v) = \Omega(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{u^2+2\omega^2 v}{1-\omega} & \omega^2 u & \frac{\omega u^2 - \omega^2 v}{1-\omega} \\ \omega^2 u & -\omega^2 & u \\ \frac{\omega u^2 - \omega^2 v}{1-\omega} & u & \frac{\omega^2 u^2 + 2\omega^2 v}{1-\omega} \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}3)$$

となります（ただし$\omega = \exp\frac{2}{3}\pi i$）. 実際には次のようにします。$a_{2i} = \int_{B_i}\varphi_2$, $b_{2i} = \int_{B_i}\varphi_3$, $c_{2i} = \int_{B_i}\varphi_1$, $a_{2i-1} = \int_{A_i}\varphi_2$, $b_{2i-1} = \int_{A_i}\varphi_3$, $c_{2i-1} = \int_{A_i}\varphi_1$としたとき，自己同型$\rho: \begin{cases} w' = \omega w \\ z' = z \end{cases}$

の周期積分への作用から

$$a_5 = -\omega^2 a_1, \ a_4 = \omega^2 a_3, \ a_6 = \omega a_2, \ b_5 = -\omega^2 b_1, \ b_4 = \omega^2 b_3,$$
$$b_6 = \omega b_2, \ c_5 = -\omega c_1, \ c_4 = \omega c_3, \ c_6 = \omega^2 c_2$$

が得られ，一方Riemannの周期関係式から

$$-c_1a_2 + c_2a_1 - c_3a_4 + c_4a_3 - c_5a_6 + c_6a_5 = 0,$$
$$-b_1a_2 + b_2a_1 - b_3a_4 + b_4a_3 - b_5a_6 + b_6a_5 = 0$$

が成り立ちます．はじめに周期行列$\left(\left(\int_{A_j}\varphi_i\right), \left(\int_{B_j}\varphi_i\right)\right)$をつくり上の関係式を用いて

$$\left(\int_{A_j}\varphi_i\right)^{-1}\left(\int_{B_j}\varphi_i\right) = \Omega(u,v)$$

が得られます．

こうして$C(\xi)$の周期は$[\eta_0,\eta_1,\eta_2]$又は(u,v)で定まるのでξに$[\eta_0,\eta_1,\eta_2]$を対応させるΛから$\mathbb{P}^2$への多価解析写像をΦとしこれを周期写像と呼びます．このとき$\Phi(\Lambda)$は

$$D=\{[\eta_0,\eta_1,\eta_2]\in\mathbb{P}^2 : {}^t\eta H\bar{\eta}<0\} \quad \left(ただし\ H=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$
$$=\{(u,v)\in\mathbb{C}^2 : 2\mathrm{Re}\,v+|u|^2<0\}$$

の稠密開集合となり，$\pi_1(\Lambda,*)$が$H_1(C(\xi),\mathbb{Z})$に作用してひきおこすDの一次変換群（モノドロミー群）は

$$\Gamma=\{g\in PGL(3,\mathbb{Z}[\omega]) : {}^tgH\bar{g}=H\}$$

の合同部分群

$$\Gamma_1=\{g\in\Gamma : g\equiv id\ (\mathrm{mod.}\ (\sqrt{-3}))\}$$

で与えられます（ここで$g\equiv id$はgの係数を$\mathbb{Z}[\omega]/(\sqrt{-3})$におとして単位行列になるという意味です）．[1]と同じようにΦはΛのコンパクト化$\mathbb{P}^2$からD/Γ_1のコンパクト化への正則写像に拡張され，さらに正則同型であることが分ります．このとき拡張されたΦはξ-空間の4点$P_0=[1,0,0]$，$P_1=[0,1,0]$，$P_2=[0,0,1]$，$P_3=[1,1,1]$を除く各点をDの内点に写像し，P_iたちがD/Γ_1に添加される境界点にそれぞれ対応します．

この領域Dは$\Omega(\xi)$についてのRiemannの周期不等式から得

られます．また Φ の拡張は実際に η_i たちの $\mathbb{P}^2-\Lambda$ での境界挙動を調べて示します．すると Φ はコンパクト多様体の間の写像になるので全射となることは容易に分ります．単射であることはトレリ型定理によって示すことができます．モノドロミー群は生成元を決定し，それによって群の特徴づけをします（Γ_1 の部分群であることが最初に分り，指数を調べて一致することを示します）．

以上のことから Φ の逆写像は D 上定義されていて Γ_1 に関して不変な $\mathbb{P}^2$ への正則写像であることが分ります．これを $[\xi_0(u,v), \xi_1(u,v), \xi_2(u,v)]$ とおき ξ_k およびその比で与えられる有理型函数を Picard モジュラー函数と呼びます．ただし，今の段階では $\xi_k(u,v)$ 自身の意味は確定していません．これについて次節で論じます．

§.2 展開表示

次の二つの命題は Picard モジュラー函数を調べるための出発点になると思われます．

<u>命題1</u>．「 $\xi_k(u,v) = \theta^3\begin{bmatrix}0 & 1/6 & 0\\ k/3 & 1/6 & k/3\end{bmatrix}(0, \Omega(u,v))$ $(k=0,1,2)$

が成り立つ，ただし等号は両辺の連比の相等を示す．さらに

$$\theta_k(u,v) = \theta\begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ k/3 & 1/6 & k/3 \end{bmatrix}(0, \Omega(u,v))$$

とおくと

$$\theta_k(u,v) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}[\omega]} H_{\mu,k}(u)\, q^{N(\mu)}$$

（ただし　$q = \exp\frac{2\pi i}{\sqrt{-3}}v$，$\mathrm{tr}\,\mu = \mu+\bar{\mu}$，$N(\mu) = \mu\bar{\mu}$　として

$$H_{\mu,k}(u) = \exp\frac{\pi i \mu^2 u^2}{\sqrt{-3}}\left\{\omega^{k\,\mathrm{tr}\,\mu}\,\theta\begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}(\mu u, -\omega^2) + \omega^{-k\,\mathrm{tr}\,\mu}\,\theta\begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/6 \end{bmatrix}(\mu u, -\omega^2)\right\}$$

が成り立つ。」

さらに $\theta_k(u,v)$ は $\{\xi_k = 0\}$ の亜による像の上でのみ 0 をとり，特に $\theta_k(u,v)$ たちはどのペアも D 上で共通零点をもたないことが分ります。また $H_{\mu,k}(u)$ は $\mathbb{C}/(1-\omega)\mathbb{Z}+(1-\omega^2)\mathbb{Z}$ で与えられる楕円曲線上の因子 $3N(\mu)\cdot 0$ の定める直線束の正則切断でその幾何学的意味は後に述べます．

命題1はJacobiの公式の拡張であり §1 [1] と同様に上のテータ0値もある保型形式であることが予想されますが，実際次のことが示されます．

命題2．「$\xi_k(u,v) = \theta_k^3(u,v)$ は $\Gamma' = \Gamma_1 \cap PSL(3,\mathbb{Z}[\omega])$ に関する重み1の保型形式であり，Γ'－保型形式のなす次数環は $\mathbb{C}[\xi_0,\xi_1,\xi_2,\zeta]/(\zeta^3 - \xi_0\xi_1\xi_2(\xi_0-\xi_1)(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_0))$ で与えられる。」

ここで $\sigma:\begin{cases} u'= \omega u \\ v'= \end{cases}$ とすると，$\Gamma_1=\langle\sigma\rangle\ltimes\Gamma'$ であり $\xi_k(\sigma(u,v))=\xi_k(u,v)$ となることが分ります（保型形式であるためには $\xi_k(\sigma(u,v))=\left(\partial(u',v')/\partial(u,v)\right)^{-1}\xi_k(u,v)=\omega^2\xi_k(u,v)$ でなくてはならない）．

§.3　命題の証明の概要

以下§2 の二つの命題の証明の方針を述べます．

［1］準備として証明の鍵になるコンパクト Riemann 面上のテータ函数の性質を挙げておきます．

X は種数 g のコンパクト Riemann 面．$\{A_i, B_i\}$ を $H_1(X,\mathbb{Z})$ の基底 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_g)$ をそれに双対的な $H^0(X,\mathcal{O}(K))$ の基底にとり固定します．このとき X の周期行列 Ω が定まります．X 上の基点 P_0 を固定しておきます．f を X 上の有理型函数，$(f)=\sum_{i=1}^{m}(a_i-b_i)$ を f の定める因子とし P_0 から各 a_i b_i へ至る道を

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{P_0}^{a_i}\omega-\int_{P_0}^{b_i}\omega\right)=0$$

なるようにとります．

<u>定理 A.</u>「次数 g の正因子 $P_1+\cdots+P_g$ に対し

$$f(P_1)\cdots f(P_g)=\frac{1}{E}\prod_{k=1}^{m}\left\{\frac{\theta\left(\sum_i\int_{P_0}^{P_i}\omega-\int_{P_0}^{a_k}\omega-\Delta,\ \Omega\right)}{\theta\left(\sum_i\int_{P_0}^{P_i}\omega-\int_{P_0}^{b_k}\omega-\Delta,\ \Omega\right)}\right\}\quad(3\text{-}1)$$

が成り立つ，ここでΔは以下に述べるRiemann定数，Eは因子$\sum P_i$によらない定数．さらにP_0からP_iへの道は分母，分子で同一のものとする．」

(3-1)の分母，分子は次の条件が同時に満たされるとき，ともに0でないことが保証されます．

C: (i) $D = P_2 + \cdots + P_g$ は一般因子，即ち $D \leqq (\lambda)$ となるAbel微分が定数倍を除いて一意に定まる．
(ii) $P_1, \cdots, P_g$ は a_k, b_k $(1 \leqq k \leqq m)$ と異る．
(iii) P_1 は $(\lambda) - D$ に含まれない．

またΔは

$$\Delta = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\Omega_{11}\\ \vdots \\ \Omega_{gg}\end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{g} \int_{A_k} \left(\int_{P_0}^{P} \omega\right) \omega_k \qquad \left(\Omega = (\Omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq g}\right)$$

で定義されるXのJacobi多様体$\mathrm{Jac}(X)$上の定点．このΔの特徴づけを以下与えてゆきます．

$\Sigma = \{ X$の因子D: $2D \equiv K \}$ ($\equiv$は線型同値の意味)とおきΣの2元D_1, D_2をとります．$D_1 - D_2 = \sum_{i=1}^{m} (a_i - b_i)$とおくと

$$I(D_1 - D_2) = \sum_{i=1}^{m} \int_{a_i}^{b_i} \omega$$

はAbelの定理から$\mathrm{Jac}(X)$の半周期点 $\Omega\eta' + \eta''$ $(\eta', \eta'' \in (\tfrac{1}{2}\mathbb{Z})^g / \mathbb{Z}^g)$を定めます．上の$\Delta$はある$\Sigma$の元$D_0$によって

$$\Delta = I(D_0 - (g-1)P_0)$$

（Iの意味は前と同様）で与えられ，とくに $(2g-2)P_0 \equiv K$ のときそのときのみ Δ は $\mathrm{Jac}(X)$ 上の半周期点になります。P_0 がこの条件を満すとき Δ は次で特徴づけられます。

<u>定理 B.</u> 「$I(D-(g-1)P_0) = \Omega\eta' + \eta''$, $d(D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}([D]))$ とするとき，Σ の各元 D に対して

$$d(D) \equiv 4\,{}^t(\eta'-\eta_0')(\eta''-\eta_0'') \pmod{2}$$

となる $(\eta_0', \eta_0'') \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$ がただ一組定まり

$$\Delta = \Omega\eta_0' + \eta_0''.」$$

[2] $C(\xi)$ を $w^3 = z(z-1)(z-x)(z-y)$ $(x = \xi_1/\xi_0,\ y = \xi_2/\xi_0)$ と表し，$Q_1 = (z, w) = (0, 0)$, $Q_2 = (z, w) = (1, 0)$, $Q_3 = (z, w) = (x, 0)$, $Q_4 = (z, w) = (y, 0)$, $Q_5 = (z, w) = (\infty, \infty)$ と定めます。[1] に於ける X として $C(\xi)$ をとり $H_1(C(\xi), \mathbb{Z})$, $H^0(C(\xi), \mathcal{O}(K))$ の基底は §1 のものとします。また基点 P_0 として Q_5 をとります。このとき $(2g-2)P_0 = 4Q_5 \equiv K$ は容易に確められます。f として $C(\xi)$ 上の函数 z をとると $(f) = 3Q_1 - 3Q_5$ となります。X 上の因子 $D_1 = 2Q + Q_3$, $D_2 = Q_2 + 2Q_3$ に対して定理Aを適用して比をとると定数 E は消去されて，$f^2(Q_1)f(Q_3) = x$ および $f(Q_2)f^2(Q_3) = x^2$ から x の表示を得ます。また因子 $D_3 = 2Q_2 + Q_4$, $D_4 = Q_2 + 2Q_4$ を用いると同様にして y の表示を得ます。それらを書き下して (3-2), (3-3) となります。

$$x = \prod_{k=1}^{3} \left\{ \frac{\theta\left[\int_{Q_5}^{Q_2}\omega + 2\int_{Q_5}^{Q_3}\omega - \int_{\alpha^{(k)}(5,1)}\omega - \Delta, \Omega(\xi)\right]}{\theta\left[\int_{Q_5}^{Q_2}\omega + 2\int_{Q_5}^{Q_3}\omega - \Delta, \Omega(\xi)\right]} \right\} \tag{3-2}$$

$$\times \prod_{k=1}^{3} \left\{ \frac{\theta\left[2\int_{Q_5}^{Q_2}\omega + \int_{Q_5}^{Q_3}\omega - \Delta, \Omega(\xi)\right]}{\theta\left[2\int_{Q_5}^{Q_2}\omega + \int_{Q_5}^{Q_3}\omega - \int_{\alpha^{(k)}(5,1)}\omega - \Delta, \Omega(\xi)\right]} \right\},$$

$$y = \prod_{k=1}^{3} \left\{ \frac{\theta\left[\int_{Q_5}^{Q_2}\omega + 2\int_{Q_5}^{Q_4}\omega - \int_{\alpha^{(k)}(5,1)}\omega - \Delta, \Omega(\xi)\right]}{\theta\left[\int_{Q_5}^{Q_2}\omega + 2\int_{Q_5}^{Q_4}\omega - \Delta, \Omega(\xi)\right]} \right\} \tag{3-3}$$

$$\times \prod_{k=1}^{3} \left\{ \frac{\theta\left[2\int_{Q_5}^{Q_2}\omega + \int_{Q_5}^{Q_4}\omega - \Delta, \Omega(\xi)\right]}{\theta\left[2\int_{Q_5}^{Q_2}\omega + \int_{Q_5}^{Q_4}\omega - \int_{\alpha^{(k)}(5,1)}\omega - \Delta, \Omega(\xi)\right]} \right\}.$$

ここで $D_1, \cdots, D_4$ が [1] の諸条件 C を満すことが確められ，また $\alpha^{(k)}(i,j)$ は $C(\xi)$ の k 番目の枝をとって Q_i から Q_j に至る道を表します．

この式の変数を全て周期 $\Omega(\xi)$ を用いて $\Omega(\xi)a+b$ $(a,b\in\mathbb{Q}^3)$ の形に表せば，$\Omega(\xi)$ は既に (1-3) で与えられていますから x および y は (u,v) の函数として確定します．また Δ を除く各積分たちは $C(\xi)$ の分岐点を結ぶ道に沿うもので，これらはある周期積分の $1/3$ になります．実際次の計算結果が得られ

ます．

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\alpha^{(1)}(5,2)}\omega=\frac{1}{3}\left\{\Omega\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\right\},\\
&\int_{\alpha^{(1)}(5,3)}\omega=\frac{1}{3}\left\{\Omega\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}\right\},\\
&\int_{\alpha^{(1)}(5,4)}\omega=\frac{1}{3}\Omega\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\ \int_{\alpha^{(1)}(5,1)}\omega=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},\\
&\int_{\alpha^{(2)}(5,1)}\omega=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix},\ \int_{\alpha^{(3)}(5,1)}\omega=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}.
\end{aligned}\right\}\quad(3\text{-}4)$$

従ってあとはΔを決定することが問題となります．そこで以下のことに注意します．我々はRiemann面$C(\xi)$の族を考えているのですが，その中の一つの元$C_0=C(\Xi)$を固定し，$\mathfrak{A}$のホモロジー基底に関する$\Delta=\Omega(\Xi)\eta'+\eta''$が定まれば，パラメータ空間$\Lambda$上で$\Xi$から$\xi$に至る道に沿って$C(\Xi)$を変形して，$C(\xi)$のRiemann定数$\Delta=\Omega(\xi)\eta'+\eta''$が同一の$\eta', \eta''\in(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^3/\mathbb{Z}^3$によって与えられます．よって，ある一つの曲線$C_0$上で$\Delta$を求めれば十分であり，そのためには更に$C_0$を$H^1(C_0,\mathbb{Z})$ごと他の曲線に変形して求めてもよいことになります．

$$X_1:\ w^3=z^4-1$$

に於て，$Q_1:(z,w)=(1,0)$，$Q_2:(z,w)=(i,0)$，$Q_3:(z,w)=(-1,0)$，$Q_4:(z,w)=(-i,0)$，$Q_5:(z,w)=(\infty,\infty)$と定める

と z 座標を適当に一次変換して $\{C(\xi)\}$ の元と見なすことができます。変形

$X(t)$; $z^4 = \{w + \omega^2 t + (t-1)i\}\{w + \omega t + (1-t)i\}\{(1-t)w + 1\}(w-1)$

$(0 \leqq t \leqq 1)$ によって X_1 と Fermat 曲線

$$X_0 ; \quad z^4 = w^4 - 1$$

を結ぶことができます。このとき X_1 の基点 Q_5 は X_0 の基点 Q_5 : $(z, w) = (0, 1)$ に移動し $4P_0 \equiv K$ は不変です。そこで X_0 上の Δ を求めます。そのためには X_0 上で $I(D - 2Q_5)$ が $\mathrm{Jac}(X_0)$ の半周期点を与えるような因子 D（一般に正因子ではない）たち計 $2^{2g} = 64$ 個を求めて各々について $d(D)$ を計算します。さらに $I(D - 2Q_5) = \Omega\eta' + \eta''$ となる η', η'' を全て決定し定理 B が成立するような半整数ベクトル η_0', η_0'' を見つければよいわけです。

X_0 に於て R_1 : $(z, w) = (0, 1)$, R_2 : $(z, w) = (0, i)$, R_3 : $(z, w) = (0, -1)$, R_4 : $(z, w) = (0, -i)$, Q_1 : $(z, w) = (1, 0)$, Q_2 : $(z, w) = (i, 0)$, Q_3 : $(z, w) = (-1, 0)$, Q_4 : $(z, w) = (-i, 0)$ とおき, R_1' : $(z, w) = (a, b)$ を

$$\int_{Q_1}^{R_1'} \frac{dw}{z^3} = \frac{1}{2} \int_{Q_1}^{R_1} \frac{dw}{z^3}$$

となる点, R_2' : (ia, ib), R_3' : $(-a, -b)$, R_4' : $(-ia, -ib)$ とします。Δ の決定に最小限必要な $E_i = D_i - 2Q_5$ だけ列挙すると

$E_0 = 0$, $E_1 = 2Q_4 - 2Q_1$, $E_2 = Q_1 + Q_3 - R_1 - R_3$, $E_3 = 2R_4 - 2R_1$
$E_4 = Q_3 + R_3 - Q_1 - R_1$, $E_5 = R_1' + R_3' + R_1 + R_2 - (Q_1 + Q_2 + 2Q_3)$
となり，$d_i = d(D_i)$ は

$$d_0 = d_3 = d_5 = 1,\ d_1 = d_2 = d_4 = 0$$

が計算によって分り，η', η'' たちは以下で与えられます．

$$\int_{E_0} \varphi = \frac{1}{2}\Omega\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \int_{E_1} \varphi = \frac{1}{2}\Omega\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$\int_{E_2} \varphi = \frac{1}{2}\Omega\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \int_{E_3} \varphi = \frac{1}{2}\Omega\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\int_{E_4} \varphi = \frac{1}{2}\Omega\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}. \quad \int_{E_5} \varphi = \frac{1}{2}\Omega\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

結局これらから

$$\Delta = \Omega\begin{pmatrix}0\\1/2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1/2\\0\end{pmatrix} \tag{3-5}$$

を得ます．(3-4) および (3-5) を (3-1)，(3-2) に代入して計算すると命題1の式が得られます．

[3] D/Γ' のコンパクト化 $\widehat{D/\Gamma'}$ は $\widehat{D/\Gamma_1} \cong \mathbb{P}^2$ 上の分岐3重被覆（$(\Gamma_1 : \Gamma') = 3$ ですから）であり $\mathbb{P}^2$ 上 $\mathbb{P}^2 - \Lambda$ で与えられる6本の直線上で3重分岐しています．このことから $\widehat{D/\Gamma'}$ は $\mathbb{P}^2$ の4点 P_0, P_1, P_2, P_3（これらは3直線の交わり）の上にある点 $\hat{P}_i$ $(i = 0, \cdots, 3)$ で $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ の形，即ち単純楕円特異点 $\tilde{E}_i$ を生じています．$\widehat{D/\Gamma'} = V$，V の最小非特異モデルを $\tilde{V}$ とすると $\tilde{V}$ は $\mathbb{P}^1 \times E$（ただし E は楕一

不変量0の楕円曲線）となることが分ります．またVのP_0での特異点除去で得た楕円曲線をE_0とすると，E_0の近傍はE_0を0－切断とするnegativeな直線束の構造をもちます．命題1の表示はこの直線束上で正則な函数$\theta_k(u,v)$をファイバーの座標 $q=\exp\frac{2\pi i v}{\sqrt{-3}}$ に関して巾級数展開したもので，$E_0\cdot E_0=-3$ ゆえ q^ν の係数はE_0上の因子 $3\nu\cdot1$点 の定める直線束の正則切断になります．

［4］ 次に命題2の証明について述べます．Dに於ける変換群$*$に関する重みkの正則な保型形式のなす$\mathbb{C}$－ベクトル空間を$A(*)_k$，それらの直和 $\bigoplus_k A(*)_k$ を$A(*)$と書くことにします．$A(*)_k$の元は $D/*$のコンパクト化（又はその非特異モデル）の上での有理型k次微分形式になることから，これらの定める因子の特徴づけをすることにより

$$\dim A(\Gamma_1)_1=0,\ \dim A(\Gamma_1)_2=1,\ \dim A(\Gamma')_1=3$$

となることが分ります．そこで，主張$(*)$：

「$\xi_k(u,v)$ $(k=0,1,2)$ が $A(\Gamma')_1$ の基底であり，

$\zeta=\sqrt[3]{\xi_0\xi_1\xi_2(\xi_0-\xi_1)(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_0)}$ が$A(\Gamma_1)_2$の基底である．」

を設けます．$(*)$の後半は前半が示されれば容易です．また$(*)$が分れば，Vの構造環が既知なので$A(\Gamma')$の次数環としての構造が決定されます．従って$\xi_k(u,v)$の保型性を示すわけ

ですが，そのときの鍵となるのは次の変換公式です．

定理C．「Ωを Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_g$ の点，$M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$ を $Sp(g,\mathbb{Z})$ の元とし，

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon'\\ \varepsilon''\end{bmatrix},\quad \varepsilon',\varepsilon''\in\mathbb{Q}^g$$

に対し

$$M\circ\Omega=(A\Omega+B)(C\Omega+D)^{-1},$$

$$M\circ[\varepsilon]=\begin{bmatrix}D\varepsilon'-C\varepsilon''+\frac{1}{2}dv(C\,{}^tD)\\ -B\varepsilon'+A\varepsilon''+\frac{1}{2}dv(A\,{}^tB)\end{bmatrix}$$

（ただし $dv(*)$ は$*$の対角ベクトルを表す）とするとき，

$$\theta[M\circ[\varepsilon]](0,M\circ\Omega)=K(M,\varepsilon)\sqrt{\det(C\Omega+D)}\,\theta[\varepsilon](0,\Omega)$$

が成り立つ．ここで $K(M,\varepsilon)$ は絶対値1の複素数で平方根の分枝を指定したときMとεとから計算できる．」

$\xi_k(u,v)$ の保型性は Γ_1 の生成元について調べてゆきます．Γ_1 は次の $g_1,\cdots,g_5$ から生成され，各 g_i は対応する $H_1(C(\xi),\mathbb{Z})$ に左から作用するシンプレクティック変換（モノドロミー変換）N_i からひきおこされています：

$$g_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\omega\end{pmatrix},\qquad g_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \omega-\omega^2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$g_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \omega-1&1&\omega-1\\ 1-\omega^2&0&1\end{pmatrix},\qquad g_4=\begin{pmatrix}1&\omega-\omega^2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad g_5=\begin{pmatrix}1&\omega-1&\omega-1\\0&1&0\\0&1-\omega^2&1\end{pmatrix}.$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき，N_i および g_i の定義により

$$\theta_k(g_i(u,v)) = \theta\begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ k/3 & 1/6 & k/3 \end{bmatrix}(0, N_i \circ \Omega(u,v))$$

であり，

$$\theta\begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ k/3 & 1/6 & k/3 \end{bmatrix}(0, N_j \circ \Omega) = \rho_j\, \theta\left[N_j \circ \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ k/3 & 1/6 & k/3 \end{bmatrix}\right](0, N_j \circ \Omega) \quad (3\text{-}6)$$

（ただし $\rho_1 = \exp\frac{1}{3}\pi i$，$\rho_2 = \cdots = \rho_5 = 1$ ）となることが計算で確められます。従って（3-6）の右辺を変換公式で調べてゆきます。

$Sp(g, \mathbb{Z})$ の生成系として

$$S: \begin{cases} {}^{\pm}B_i = I \pm E_{i,g+i}, \quad {}^{\pm}C_i = {}^{t}({}^{\pm}B_i) \quad (1 \leqq i \leqq g), \\ {}^{\pm}A_{ij} = I + (\pm E_{i,j} \mp E_{g+i,g+j}) \quad (1 \leqq i, j \leqq g,\ i \neq j), \\ D_i = I - 2(E_{ii} + E_{g+i,g+i}) \quad (1 \leqq i \leqq g) \end{cases}$$

をとることができます（E_{ij} は (i,j) 成分のみ 1 となる行列単位）。この生成系の要素に対しては乗法因子は容易に定まり，一般の元は生成元に分解し乗法因子の積み重ねをします

$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{Z})$ と $\varepsilon=\begin{bmatrix} \varepsilon' \\ \varepsilon'' \end{bmatrix}$ $(\varepsilon', \varepsilon'' \in \mathbb{Q}^g)$ に対して

$$\varphi(M,\varepsilon) = -{}^t\varepsilon' \, {}^tD B \varepsilon' + 2\,{}^t\varepsilon'' \, {}^tC B \varepsilon' - {}^t\varepsilon'' \, {}^tC A \varepsilon'' + {}^t(D\varepsilon' - C\varepsilon'')\,\mathrm{dv}(A\,{}^tB),$$

$M_1, M_2 \in Sp(g, \mathbb{Z})$ に対して

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = (M_2M_1)\circ\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - M_2\circ M_1\circ\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = 2(M_2M_1)\circ\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$[M_2, M_1] = (-1)^{\langle \lambda_1, m_2 \rangle}$$ （$\langle\ ,\ \rangle$ はユークリッド内積）

と記号を定めます．S の元 M に対して

$$\gamma(M) = \begin{cases} 1 & M \text{ が } A, B, C \text{ 型のとき} \\ -i & M \text{ が } D \text{ 型のとき} \end{cases},$$

$$\sqrt{\det C(M)\Omega + D(M)} = \begin{cases} 1 & M \text{ が } A, B \text{ 型のとき} \\ i & M \text{ が } D \text{ 型のとき} \\ \text{右半平面の枝} & M \text{ が } C \text{ 型のとき} \end{cases}$$

（ただし $M=\begin{pmatrix} A(M) & B(M) \\ C(M) & D(M) \end{pmatrix}$ とおいている）

と定め，

S の 2 元 M', M'' に対しては

$$\gamma(M'M'') = [M', M'']\,\gamma(M')\,\gamma(M'')\exp\left\{\pi i \varphi\left(M', M''\circ\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right\}$$

と定めます．

一般に $M = M_r \cdots M_1$ $(M_i \in S)$ に対し帰納的に

$$\gamma(M) = [M_r, M_{r-1}\cdots M_1]\,\gamma(M_r)\,\gamma(M_{r-1}\cdots M_1)$$
$$\times \exp \pi i \varphi(M_r, M_{r-1}\cdots M_1 \circ \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right])$$

と定めさらに $S_k = M_k \cdots M_1$ とおいて

$$\sqrt{\det(C(M)\Omega + D(M))} = \prod_{k=1}^{r} \sqrt{\det(C(M_k)(S_{k-1}\circ\Omega) + D(M_k))}$$

で左辺を定めます．

このとき定理Cの乗法因子 $K(M,\varepsilon)$ は

$$K(M,\varepsilon) = \gamma(M)\exp\{\pi i \varphi(M,\varepsilon)\}$$

で与えられます．N_1, N_2, N_3 に対する乗法因子は容易ですが N_4, N_5 に関しては分解

$$N_4 = {}^{-}C_1\,{}^{-}C_3\,{}^{-}A_{13}\,{}^{-}C_1\,{}^{+}A_{13}$$
$$N_5 = {}^{-}A_{13}\,{}^{-}A_{23}\,{}^{-}C_2\,{}^{+}A_{21}\,{}^{-}C_1\,({}^{+}C_2)^2\,{}^{+}A_{13}\,{}^{-}A_{23}\,{}^{-}C_2$$

を用いて実際に上の計算を実行します．以上の結果主張(*)が示され，命題2が得られます。

§.4 展望

古典虚数乗法論に於て，${}^{t}gHg = mH$ $(m\in\mathbb{Z})$ となる $M(2,\mathbb{Z})$ の元 g を m 次相似変換とよび，2つの相似変換 g_1, g_2 は $g_2 = \gamma g_1$ となる $PSL(2,\mathbb{Z})$ の元 γ が定まるとき同値とします．すると $D=\{\operatorname{Im}\tau > 0\}$ の点 α がある相似変換の不動点となるのは α が虚二次体 の元のときそのときのみで

あり，一方変換方程式

$$\Phi_m(\tau) = \prod_i \{ j(\tau) - j(g_i(\tau)) \}$$

を考えると（j はモジュラー函数，g_i は m 次相似変換の全ての代表を渡る），$\Phi_m(\tau)$ 自身保型函数であり，$j(\tau)$ の Fourier 展開から見てこれが $j(\tau)$ の $\mathbb{Q}$ 係数多項式であることが分ります．従って $j(\alpha)$ は $\Phi_m(\tau)$ の零点ゆえ，代数的数であることが導かれます．

このような論法が Picard モジュラー函数についてどこまで通用するのでしょうか？

1°．例えば，$M(3, \mathbb{Z}[\omega])$ の元 g で ${}^t g H \bar{g} = mH$ となるものを上と同様に m 次相似変換と定めたとして，$D=\{2\mathrm{Re}\,v+|u|^2<0\}$ 内の点 α がある m 次相似変換の孤立不動点となるのは α がどのようなときでしょうか？

2°．またそのとき

$$\prod_i \{\xi_j(u,v)\,\xi_l(g_i(u,v)) - \xi_j(g_i(u,v))\,\xi_l(u,v)\} \quad (l \neq j)$$

を変換方程式と考えると，保型形式が得られそれは $\xi_0(u,v)$, $\xi_1(u,v)$, $\xi_2(u,v)$ の斉次多項式になると思われますが，その係数はいかなる体に属するのでしょうか？

この問題を1変数の類比で考えるとすると，$\theta_k(u,v)$ の Fourier係数 $H_{\mu,k}(u)$ たちを直線束の正則切断の標準基底で表示して，正則切断のつくる少くとも $\bar{\mathbb{Q}}$（$\mathbb{Q}$ の代数閉包）ー

係数の次数環の中で考えなくてはなりません。

$H_{\mu,k}(u)$ は

$$(*)\ \begin{cases} f(u+(1-\omega^2)) = \exp\{2\pi i\nu\omega^2(u+1)\}f(u) \\ f(u+(\omega-1)) = \exp\{2\pi i\nu\omega(u+\omega)\}f(u) \end{cases} \qquad (\nu = N(\mu))$$

という周期性をもち，(*) をみたす f 全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間 R_ν は 3ν 次元で，その基底は例えば

$$f_{\nu,a}(u) = \exp \pi i \frac{\nu u^2}{\sqrt{-3}}\ \theta\begin{bmatrix} \frac{a}{3\nu}-\frac{1}{2} \\ \frac{\nu}{2} \end{bmatrix}(\nu u, \nu(1-\omega^2))$$
$$(a = 0, \cdots, 3\nu-1)$$

で与えることができます。また $\{f_{1,a}\}$ が $R = \bigoplus_\nu R_\nu$ の生成元になります．このとき $H_{\mu,k}(u)$ が　$f_{\nu,a}(u)$ たちの $\mathbb{Q}$ 係数一次結合に書けることは変換公式定理 C を用いて示すことができます．

3°．それでは　$\mathbb{Q}[f_{1,0}, f_{1,1}, f_{1,2}]$　は次数環の構造をもつのでしょうか？

この問題は，次の予想と関連します。

4°．τ が虚 2 次体の数のとき，任意の $m \in \mathbb{N}$，任意の a, b, a', $b' \in \mathbb{Q}$　に対して

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(0, \tau) \Big/ \theta\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}(0, m\tau)$$

は代数的数になるのか？

以上がこの Picard　モジュラー函数を考えるときに残されている懸案です．

References

[1] Deligne.P.-G.D.Mostow: Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, preprint.

[2] Holzapfel,R.P.: Euler-Vorlesung 1982; Zweidimensionale periodische Funktionentheorie der Kugel, Akad. Wissenschaften der DDR, Berlin(1983).

[3] Mumford,D.: Tata lectures on theta I, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart(1983).

[4] Picard,E.: Sur les fonctions de deux variables indépendentes analogues aux fonctions modulaires, Acta Math.,2(1883),114-135.

[5] Shiga,H.: One attempt to the K3 modular function I-II, Ann. Scuola Norm. Pisa, Ser.IV-Vol.VI(1979),609-635, Ser.IV-Vol.VIII(1981),157-182.

[6] Siegel,C.L.: Topics in complex function theory II, Wiley, Newyork(1971).

[7] Terada,T.: Fonctions hypergèométriques F_1 et fonctions automorphes I-II, J. Math. Soc. Japan, 35(1983), 451-475, 37(1985), 173-185.

[8] Wakabayashi,I.: Note on Picard's modular function of two variables, private note.